الاسم:

وزارة التعليم العالي — الامتحان النهائي — الدرجة 100

جامعة البعث — لمقرر تحليل (2)- السنة الأولى رياضيات

كلية العلوم — الفصل الأول لعام 2014- 2015 — المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (24درجة) : أكتب الجواب النهائي لقيم التكاملات الآتية :

$$1-I=\int \ln|x|\,dx \quad , \quad 2-I=\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$3-I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \quad , a\neq 0$$

السؤال الثاني (26درجة) : أحسب قيمة التكاملات الآتية :

$$1-\mathrm{I}=\int\frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx \quad , \quad 2-I=\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

السؤال الثالث (26درجة) : (أ) أحسب التكامل المحدد الآتي بعد التأكد من وجوده :

$$\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

(ب) أوجد طول المنحني المعطى بالمعادلات الآتية :

$$x=cos^3\theta \quad , \quad y=sin^3\theta \quad , 0\leq\theta\leq 2\pi$$

السؤال الرابع (24دُرجة) : أدرس تقارب أو تباعد التكاملين المعتلين الآتيين وعين القيم في حال التقارب .

$$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \quad , \quad \int_1^\infty\frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$$

انتهت الأسئلة

حمص في 2015/2/1 مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرسا المقرر

د. منير مخلوف

د. نجوى الجيجكلي

د. عوض الجبيلي

٤

سلم تصحيح تحليل 2
سنة أولى رياضيات

السؤال الأول:

- $I=\int \ln|x|\,dx$

نفرض أن $\ln|x|=t \rightarrow x=e^t \Leftarrow dx=e^t dt$

$I=\int \ln|x|\,dx=\int t\,e^t dt=\begin{pmatrix} u=t \to du=dt \\ dv=e^t dt \to v=e^t \end{pmatrix}= te^t-\int e^t dt$

$=te^t-e^t=\boxed{x(\ln|x| ...}$

- $I=\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

نفرض أن $x=\sin t \Rightarrow I=\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt$

$I=\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int \cos^2 t\,dt=\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\int\left[\frac{1}{2}dt+\frac{\cos 2t}{2}\right]...$

$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\boxed{\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin 2(\arcsin x)+C}$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

نفرض أن $t=x+\sqrt{x^2+a} \Leftarrow$

$dt=dx+\frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+a}}=dx+\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}} \Rightarrow \sqrt{x^2+a}\,dt=dx(\sqrt{x^2+a}+x)$

$dx=\frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x}dt \Rightarrow I=\int \frac{\sqrt{x^2+a}}{(\sqrt{x^2+a}+x)\sqrt{x^2+a}}dt=\int \frac{dt}{\sqrt{x^2+a}+x}=\int ...$

$\boxed{=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C}$

التمرين الثاني :

$(-x^2-4x+5)' = (-2x-4)$

$= -\frac{1}{2}(-2x-4) + (3-2) = x+3$

$= -\frac{1}{2}(-2x-4)+1$

$I = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$, $t = 5-4x-x^2$

$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\sqrt{t} = -\sqrt{5-4x-x^2}$

$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-5+4-4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$

$= \arcsin\frac{x+2}{3}$

$I = -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\frac{x+2}{3} + C$

- $I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$, $\begin{pmatrix} \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \\ \sqrt[4]{x} = x^{1/4} \end{pmatrix}$, $t = x^{\frac{1}{12}} \rightarrow t^{12} = x$

بالتعويض في التكامل

$dx = 12t^{11}dt \rightarrow I = 12\left[\frac{t^{18}}{18} + \frac{1}{14}t^{14} - \frac{1}{6}t^6\right] + C$



سلم تصحيح الامتحان النهائي

جامعة البعث

كلية العلوم - قسم الرياضيات   المقرر تحليل ١ / سنة أولى رياضيات   الدرجة : ٥٠

الفصل الأول للعام $\frac{2014}{2015}$ (الجزء الثاني)

جواب السؤال الثالث: (أ) احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$

عشرون نقطة [20]

أن الدالة المكاملة: $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$ مستمرة على المجال $[0,1]$

وبالتالي تكون قابلة للمكاملة حسب مفهوم ريمان على هذا المجال، فالتكامل موجود

وبإجراء التحويل التالي: $x=\sin t$ ، فيكون: $dx=\cos t\,dt$

كما أنه: $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=0\Rightarrow t=0$

وبالتالي التكامل المفروض:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

يصبح بالشكل:

3 $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt$$

الآن إذا فرضنا من جديد أن: $t=\frac{\pi}{2}-u$ ، فيكون: $dt=-du$

ومن أجل $t=0$ يكون: $u=\frac{\pi}{2}$

و $t=\frac{\pi}{2}$ يكون: $u=0$ وبالتعويض نحصل على:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\,du$$

وعليه فإن:

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,dt \Rightarrow$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

السؤال الرابع : لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل :

[24] أربع وعشرون علامة

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

نلاحظ أنه توجد للدالة المكاملة نقطة شاذة : $x=1$

لذلك نكتب التكامل المفروض بالصورة :

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

ولكن :

/2 $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\lim_{a\to 1^-}\left[(a-1)^{\frac{2}{3}}-(-1)^{\frac{2}{3}}\right] = -\frac{3}{2}$$

أيضاً :

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{b\to 1^+}\int_b^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\lim_{b\to 1^+}\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_b^4\right] = \frac{3}{2}(3)^{\frac{2}{3}}$$

أي :

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$$

فإن التكامل المفروض متقارب وقيمته تساوي :

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} = \frac{3}{2}\left(-1+\sqrt[3]{9}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-\right.$$

ثانياً لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل :

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^{-2})}$$

نلاحظ أنه من أجل : $x \geq 1$ يكون لدينا :

/2 $$x^2(1+e^{-x}) > x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2}$$

ولكن :

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] =$$ [illegible]

[illegible] ، وبالتالي حسب اختبار المقارنة نجد أن التكامل المفروض متقارب .

ويمكن تطبيق اختبار النسبة فنحصل على نفس النتيجة .

مدرس المقرر :

د. منير مخلوف

(ب) إن المنحني المعطى هو الاستروئيد ولإيجاد طول هذا المنحني نوجد طول ربع المنحني ونضرب الناتج بـ 4 حيث: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ كما أنه منحني متناظر بالنسبة للمحاور والمبدأ ولدينا أن الدوال $x(\theta)$ ، $y(\theta)$ مستمرة وقابلة للمفاضلة ، فيكون طول هذا المنحني L يحسب بالقانون.

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\, d\theta$$

ونحن لدينا:

$$x'(\theta) = 3\cos^2\theta(-\sin\theta) = -3\sin\theta\cos^2\theta$$

$$y'(\theta) = 3\sin^2\theta(\cos\theta) = 3\sin^2\theta\cos\theta$$

وبالتالي فإن:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\, d\theta$$

منحني الاستروئيد

ونجد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2\theta\cos^4\theta + 9\sin^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|\cos\theta\sin\theta|\, d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta.\cos\theta\, d\theta =$$

4

$$= \frac{3}{2}\left[\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$L = 4 \times \frac{3}{2} = 6$ وحدات طول

إذاً طول المنحني المفروض هو : $L = 6$ وحدة طول.



وزارة التعليم العالي
جامعة البعث
كلية العلوم - قسم الرياضيات

الامتحان النهائي

لمقرر تحليل (2) السنة الأولى رياضيات

الفصل الثاني لعام 2012-2013 م

الاسم:

الدرجة: 100

المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (24 درجة) (أ) أحسب التكامل الآتي : $I_1 = \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$

(ب) أحسب التكامل الآتي : $|x| \le a$, $I_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

واستخدم النتيجة لحساب التكامل : $I_3 = \int \sqrt{3 - 4x^2}\, dx$

السؤال الثاني (36درجة) أحسب التكاملات الآتية :

$$\int \frac{dx}{1 + ch^2 x} \quad , \quad \int \frac{e^{2x} + 3e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx \quad , \quad \int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} dx \quad , x > 0$$

السؤال الثالث (26درجة) : حدد طبيعة التكاملات المعتلة الآتية :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3} \quad , \quad \int_0^\infty e^{-x} \cos x\, dx$$

السؤال الرابع : (14درجة) : أحسب مساحة المنحني المعطى بمعادلات الآتية :

$$x = 2\cos^3 t \quad , \quad y = 2\sin^3 t \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

أستاذ المقرر:
د.منير مخلوف

حمص في 2013/6/13



جامعة دمشق — سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل (2) — الدرجة ...

كلية العلوم - قسم الرياضيات — الفصل الثاني للعام ٢٠١٢ - ٢٠١٣

السنة الأولى رياضيات

جواب السؤال الأول: (أ) لدينا:

$$I_1 = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

24 أربع وعشرون علامة

2

$$= \arctan x - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

ونعلم من المحاضرة أن:

2 $$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[(2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

وعليه فإن التكامل: $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

نحسبه من القانون السابق فيكون $n=2$ ، $a=1$ وبالتعويض نحصل على:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(1)^2(2-1)}\left[(4-3)I_1 + \frac{x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right]$$

3 وأخيراً: $I = \arctan x - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + c$

$$= \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + c$$

(ب) إن الدالة [illegible] على المجال $[-a, +a]$ ، نفرض أن $x = \varphi(t) = a\sin t$

2 حيث $a > 0$ ، $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ عندئذ

$dx = a\cos t$ ؛ $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$

وبالتالي يكون:

2 $I_2 = \int a^2\cos^2 t = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + c$

ولكن:

$\sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$ ؛ $\cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

2 $\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$

3 وعليه فإن: $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c$

نلاحظ أن :

$I_3 = \int \sqrt{3-4x^2}\, dx$

2 $I_3 = \int \sqrt{3(1-\frac{4}{3}x^2)}\, dx = \sqrt{3}\int \sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2}\, dx$

وبوضع :

$\frac{2}{\sqrt{3}}x = t$ نجد أن ، $dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$

وبالتعويض في التكامل المفروض

2 يتحول إلى التكامل التالي :

$I_3 = \frac{3}{2}\int \sqrt{1-t^2}\cdot dt = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\arcsin t + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}\right] + c \Rightarrow$

3 $I_3 = \frac{3}{4}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{3-4x^2}}{2} + c$

جواب السؤال الثاني : حساب التكامل ، في $x>0$: $\int \frac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})^2}{x}dx$

36 سبعة وثلاثون نقطة

نلاحظ أن التكامل المفروض يكتب بالصورة :

$\int x^{-1}(x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \int x^{-\frac{1}{3}}(-2+x^{\frac{1}{6}})^2 dx$

3 $n=\frac{1}{6}$ ، $m=-\frac{1}{3}$ ، $p=2$

لذا نفرض أن : $t=\sqrt[6]{x}$ أو ، $x=t^6$

وبالتالي فإن ، $dx=6t^5dt$ وبالتعويض نحصل على ،

4 $\int x^{-\frac{1}{3}}(-2+x^{\frac{1}{6}})^2 dx = \int t^{-2}(-2+t)^2\, 6t^5 dt = 6\int t^{-2}(t^2-4t+4)t^5 dt =$

$= 6\int t^5 dt - 24\int t^4 dt + 24\int t^3 dt$

5 $= t^6 - \frac{24}{5}t^5 + \frac{24}{4}t^4 + c = x - \frac{24}{5}x^{\frac{5}{6}} + 6x^{\frac{2}{3}} + c$

الآن ، حساب التكامل : $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}dx$

نفرض أن : $t=e^x$ فيكون : $dt=e^x dx$ أي $dx=\frac{dt}{t}$ $(t>0)$

وبالتعويض نحصل على :

4 $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}dx = \int \frac{t+3}{\sqrt{t^2+t+1}}dt = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+t+1}} + \frac{5}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$

بالنسبة للتكامل الأول نلاحظ أن البسط هو مشتقة ما تحت الجذر بعد أن نضرب بـ 2

وتقسم على (2) وعليه فإن:

4 $$\frac{1}{2}\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2+t+1}} = \sqrt{t^2+t+1} = \sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}$$

أيضاً بالنسبة للتكامل الثاني لدينا:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left|(t+\tfrac{1}{2})+\sqrt{t^2+t+1}\right| =$$

4 $$= \ln\left|(e^{x}+\tfrac{1}{2})+\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}\right|$$

إذن:

$$\int \frac{e^{2x}+3e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}\,dx = \sqrt{e^{2x}+e^{x}+1} + \frac{5}{2}\ln\left|(e^{x}+\tfrac{1}{2})\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}\right| + c$$

أيضاً بالنسبة للتكامل:

$$\int \frac{dx}{1+ch^2x}$$

نفرض أن:

$$thx = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1-t^2}$$

4 ومن جهة ثانية لدينا:

$$\frac{1}{ch^2x} = 1-th^2x = 1-t^2 \Rightarrow ch^2x = \frac{1}{1-t^2}$$

وبالتعويض في التكامل المفروض نجد:

5 $$\int \frac{dx}{1+ch^2x} = \int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{thx+\sqrt{2}}{thx-\sqrt{2}}\right| + c$$

$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$ [illegible]

[illegible] ، $f(x)=e^{-x}$

$g'(x)\,dx=\cos x\,dx \Rightarrow g(x)=\sin x$

أيضاً : $f'(x)\,dx=-e^{-x}\,dx$

وبالتعويض نجد أن :

$$\int_0^u e^{-x}\cos x\,dx=\left[e^{-x}\sin x\right]_0^u+\int_0^u e^{-x}\sin x\,dx$$

أيضاً الدالة : $f(x)=e^{-x}$ ، $g(x)=-\cos x$

[illegible] $[0,\infty[$ [illegible]

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=-\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\cos x\right)=0$$

(الدالة محدودة [illegible])

وعليه [illegible] :

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx \; ; \; \int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$$

[illegible]

نلاحظ : $\int_0^u e^{-x}\sin x\,dx=\left[-e^{-x}\cos x\Big|_0^u\right]+\int_0^u \cos x\, e^{-x}\,dx$

وعليه فإن :

$$2\int_0^u e^{-x}\cos x\,dx=\left[e^{-x}(\sin x-\cos x)\Big|_0^u\right]$$

[illegible]

$$2\lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-x}\cos x\,dx=\lim_{u\to\infty}\left[e^{-u}(\sin u-\cos u)\right]+1 \Rightarrow$$

لأن : $\forall u\in\mathbb{R}$; $|\cos u|\le 1$, $|\sin u|\le 1$

ومنه : $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}$

هذا يعني أن التكامل المعرف [illegible]

أيضاً [illegible] : $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$

الحل : [illegible] $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}$ [illegible] $x=0$

ونلاحظ : $\forall x\in\,]0,1]$; $\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

3 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\Big|_s^1\right] = \lim_{s\to 0^+}\left[2-2\sqrt{s}\right] = 2$ متقارب

وبالتالي حسب اختبار المقارنة نجد أن التكامل المعتل المفروض متقارب وقيمته أصغر أو تساوي 2

أي:

3 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3} \leq 2$

جواب السؤال الرابع: المنحني المفروض هو الاستروئيد ومتناظر بالنسبة لمحوريه والمبدأ (o) 14

4

ولدينا: $x'_t = -6\cos^2 t \sin t$

$y'_t = 6\sin^2 t \cos t$

وبالتعويض في القانون:

3 $S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x y'_t - y x'_t)\, dt$

نجد أن:

$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [12\sin^2 t\cos^4 t + 12\cos^2 t \sin^4 t]\, dt =$

4 $= 6\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\, dt = 6\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt$

$= 6\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}\,\frac{1-\cos 4t}{2}\right] dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t\right) dt$

$= \frac{3}{4}\left[t\Big|_0^{2\pi}\right] - \frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\left[\sin 4t\Big|_0^{2\pi}\right] =$

3 $= \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ وحدة مربعة

أستاذ المقرر: